Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις – Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

Άσκηση 1. *Προσδιορίστε τη λύση το προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών*

$$\begin{cases} u_t = 2u_{xx} + u & \text{στο } [0,\pi] \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = 2\sin x - \sin(2x) + 3\sin(5x) & \text{για κάθε } x \in [0,\pi] \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για κάθε } [0,+\infty) \end{cases}$$

[Υπόδειξη: Ορίστε συνάρτηση v *μέσω της* u *που ικανοποιεί την εξίσωση θερμότητας.]*

Άσκηση 2. *Δείξτε ότι μια συνάρτηση της μορφής* $v(x,t) = f(\frac{x}{\sqrt{t}})$ *είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας, αν η* f *ικανοποιεί την εξίσωση*

$$f''(\xi) + \frac{\xi}{2} f(\xi) = 0.$$

Οδηγηθείτε στον τύπο $f'(\xi) = Ce^{-\frac{\xi^2}{4}}$. *Παρατηρώντας ότι η* $u = v_x$ *είναι επίσης λύση της εξίσωσης θερμότητας, βρείτε τον τύπο της* u *και τη σταθερά* C *για την οποία* $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t) = 1$.

Άσκηση 3. *Έστω* $u \in C^2$ *που ικανοποιεί* $u_t \le u_{xx}$ *στο* $I_T = [a,b] \times [0,T]$. *Δείξτε ότι η μέγιστη τιμή της στο* I_T *επιτυγχάνεται στο κομμάτι του συνόρου*

$$S_T = \big([a,b] \times \{0\}\big) \cup \big(\{a\} \times [0,T]\big) \cup \big(\{b\} \times [0,T]\big).$$

Άσκηση 4. (i) *Έστω* u *λύση του ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x,t) & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = 0 \end{cases}$$

όπου $f(x,t) \le 0$. *Δείξτε ότι η* u *λαμβάνει μόνο αρνητικές τιμές.*

(ii) *Έστω* u^1, u^2 *λύσεις των ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u^i_t = u^i_{xx} + f^i(x,t) & \text{στο } \mathbb{R} \times (0,+\infty) \\ u^i(x,0) = h(x) \end{cases}, \quad i = 1,2,$$

όπου $f^1(x,t) \le f^2(x,t)$. *Δείξτε ότι η* $u^1 \le u^2$.

Άσκηση 5. *Έστω* u^1, u^2 *λύσεις των ΠΑΤ*

$$\begin{cases} u^i_t = u^i_{xx} + f(x,t) & \text{στο } [0,\ell] \times (0,+\infty) \\ u^i(x,0) = h^i(x) & \text{για κάθε } x \in [0,\ell] \\ u^i(0,t) = g^i_0(t), \quad u^i(\ell,t) = g^i_\ell(t) & \text{για κάθε } t \in [0,+\infty) \end{cases}, \quad i = 1,2.$$

Δείξτε ότι ισχύει η εκτίμηση

$$\max_{x \in [0,\ell]} |u(x,t) - \widetilde{u}(x,t)| \le \max_{x \in [0,\ell]} |h(x) - \widetilde{h}(x)|.$$